***Errores***

La física es una ciencia que estudia los fenómenos naturales basada en las mediciones y observaciones experimentales, y utiliza un cierto número limitado de leyes para analizar dichos fenómenos. Las leyes de la física se basan en cantidades físicas. Estas cantidades, como la longitud, la masa, la fuerza, son, generalmente, determinadas experimentalmente en el proceso que se denomina medición. En el proceso de medición interviene el sistema objeto de medición, el aparato de medición y un sistema de comparación o unidad con el cual se calibra el aparato de medición.

Sin embargo, la primera dificultad se presenta en el valor que entrega el aparato de medición, ya que el mismo consta de un número acotado de cifras. Por ejemplo si un reloj cronómetro puede medir hasta centésimas de segundo, es decir puede brindar el valor 2,35 segundos, no puede conocerse cuál es la siguiente cifra decimal (tal vez 2.352 seg). Pero el valor de lo que se está midiendo tiene un número infinito de cifras, las cuales obviamente nunca podrán ser conocidas. Este proceso involucra entonces un error de apreciación, dado por el límite de apreciación del instrumento o de la medición, o escala del instrumento. Un instrumento con un límite de apreciación menor indica mayor precisión. Hay que aclarar que en algunos casos el error de apreciación no es precisamente la menor división de la escala del instrumento. Por ejemplo si una regla está dividida en centímetros, una persona medianamente entrenada puede distinguir entre 0.5 centímetros o menos. Por otro lado, si la regla está dividida en milímetros pero por alguna razón el observador no puede distinguir entre las líneas de milímetros (pero sí entre líneas cada 5 mm por ejemplo) el error de apreciación sería mayor que la mínima división de la escala.

error estadistico

error de apreciacion

El otro tipo de error que se produce en una medición está dado por los errores aleatorios, los cuáles son intrínsecos de la medición y dependen del operador, del instrumento y de diferentes factores. Estos errores no se pueden conocer a priori y por eso la teoría de errores los analiza de manera estadística, y se los llama errores estadísticos.

Para minimizar el efecto de los errores aleatorios se deben realizar muchas mediciones. Los resultados serán diferentes pero estarán alrededor de un valor más probable o promedio. Si se realizan más mediciones las mismas seguirán dando valores alrededor del promedio. En ese sentido suele realizarse un histograma que es un gráfico que cuenta cuantas mediciones entregaron un valor en determinados intervalos.

Por ejemplo, un experimento es dejar caer una pelota desde una mesa y con un cronómetro determinar el tiempo que tarda en llegar al suelo. En principio todas las mediciones deberían dar el mismo valor pero pequeñas variaciones en cómo se deja caer la pelota, cuánto demora el operador en apretar el botón del cronómetro, corrientes de aire, etc. producen que los valores de tiempo no sean exactamente iguales. Entonces supongamos que se realizan 50 mediciones. Luego, se divide la escala en intervalos de tiempo de 0.0002 seg. por ejemplo [0.4499-0.4501] [0.4501-0.4503][0.4503-0.4505] y así. Se cuentan cuántas mediciones caen en cada intervalo y se grafican.



histograma

Histograma, en donde el número de cuentas indica la cantidad de valores encontrados en cada uno de los intervalos. La línea azul indica el promedio y la curva roja es la distribución de Gauss. El número total de mediciones es N

Las mediciones se encuentran alrededor de un valor promedio. Si se realizan muchas mediciones el gráfico toma forma de una curva tipo campana llamada distribución normal o de Gauss centrada en el promedio (que llamaremos $\left〈x\right〉$).



Distribución de Gauss del histograma anterior. La región sombreada bajo la curva indica que si se realiza una nueva medición, la misma caerá con un 68% de probabilidad en el intervalo de tiempo comprendido. Esos límites están dados por la desviación estándar.

La altura de la curva indica la probabilidad de encontrar un valor dado. La teoría de probabilidad predice que el 68% de los valores caerán en el intervalo comprendido entre $\left〈x\right〉-σ $y $\left〈x\right〉+σ$ (área sombreada en la segunda figura). *σ* se denomina desviación estándar y se definirá a continuación. *σ* es un parámetro que nos indica el ancho de la curva, mientras que el promedio nos indica donde está ubicado el máximo de la curva.

promedio

Para calcular el promedio $\left〈x\right〉$ se utiliza la ecuación:

$$\left〈x\right〉=\frac{\sum\_{i}^{}x\_{i}}{N}$$

donde *xi* es cada una de las mediciones y *N* es el número total de mediciones.

Una vez calculado el promedio se calcula la desviación de cada medición *εi* como:

$$ε\_{i}=\left〈x\right〉-x\_{i}$$

Luego se elevan al cuadrado cada uno de los *εi*, se suman y se divide por el número total de mediciones menos 1. Esto es llamado la varianza *V*.

varianza y desviacion estandar

$$V= \frac{\sum\_{i}^{}\left(\left(ε\_{i}\right)^{2}\right)}{N-1}$$

Finalmente se calcula la raíz cuadrada de la varianza que es la desviación estándar *σ*.

$$σ=\sqrt{V}=\sqrt{\frac{\sum\_{i}^{}\left(\left(ε\_{i}\right)^{2}\right)}{N-1}}$$

La desviación estándar indica la dispersión o fluctuación de las mediciones respecto al valor promedio. Cuanto más grande es la desviación estándar más ancha es la distribución de Gauss asociada y más dispersas son las mediciones.

Sin embargo, si se realiza una nueva serie de mediciones del mismo sistema (por ejemplo el tiempo de caída de la pelota) encontraremos un nuevo valor promedio, cercano al ya calculado, y una nueva distribución. El parámetro que nos indica cuán cerca está el valor promedio del verdadero valor (el cual no puede determinarse) es el error estándar del promedio o error medio cuadrático δ. Este es el valor que se debe entregar como resultado junto con el promedio (en un informe por ejemplo) porque indica que el valor verdadero de una cantidad se encontrará con mayor probabilidad en el intervalo comprendido entre $\left〈x\right〉$ - δ y $\left〈x\right〉$ + δ. Entonces, cuando se deba reportar un valor de una cantidad en un informe se debe escribir$\left〈x\right〉$ **± δ,** es decir el valor promedio más/menos el error.

error medio cuadratico

El error se calcula como

$$δ=\frac{σ}{\sqrt{N}}$$

**Algunas cuestiones.**

Conviene mantener los valores de las mediciones con todas las cifras del instrumento de medición. Pero el valor final del promedio que se entrega en un informe debe tener igual cantidad de cifras que el error. Por ejemplo no tiene sentido dar el valor para el promedio del tiempo 0.4514763 s si el error es de 0.02 s ya que no se puede asegurar que los números 14736 sean correctos. Lo indicado sería escribir 0.45  ±  0.02 s. Entonces, **el valor del promedio se entrega redondeando el valor a la misma cantidad de cifras del error.**

reglas para reportar los resultados

El error se entrega generalmente con 1 ó 2 cifras significativas; pueden existir diferentes criterios. En general **consideraremos en esta asignatura, que** **el error** **se entrega redondeando a una cifra significativa. Si esa cifra es 1 se puede, entonces, tomar dos cifras significativas.**

Por ejemplo si el error es de 0.02385 se debería escribir 0.02. Si el error es 0.01423 se debería escribir 0.014. Si el error es de 39,52 se debería escribir 40.

Sin embargo, **si se deben realizar cálculos conviene retener al menos una cifra más**.

**Si se realiza una sola medición o si el error de apreciación del instrumento es mayor que el error estadístico δ, entonces se debe reportar el promedio más/menos el error del instrumento.**

Por ejemplo, no tiene sentido realizar muchas mediciones de la longitud de la tapa de un libro si solo se cuenta con una regla graduada en centímetros y por alguna razón no se puede discernir una división menor. Claramente todos los valores de las mediciones serán iguales y el error estadístico será cero. El error en este caso está dado por el instrumento de medición.

propagacion de errores

**Mediciones indirectas. Propagación de errores**

Si se debe determinar una cantidad que no se puede medir directamente, sino a través de otras mediciones, estamos ante mediciones indirectas. Por ejemplo se quiere medir el volumen de un vaso cilíndrico midiendo la altura y el diámetro del mismo. La pregunta es qué sucede con el error del volumen determinado? ¿Cómo se relaciona con los errores de la altura y el perímetro?. En estos casos se realiza una propagación de errores.

La ecuación general de propagación de errores para una función *z(x,y,t)* que depende de las variables *x*, *y* y *t*, las cuales tienen su error *δx, δy y δt* es:

$$δ\_{z}\leq \left|\frac{∂z}{∂x}\right|.δ\_{z}+\left|\frac{∂z}{∂y}\right|.δ\_{y}+\left|\frac{∂z}{∂t}\right|.δ\_{t}$$

es decir el error va a ser como mucho el valor del término de la derecha. Acá se supusieron tres variables *x, y, t* pero podría haber más o menos. Las barras indican valor absoluto, es decir sí el resultado es negativo se escribe positivo. Existen otras ecuaciones para la propagación de errores, más aproximadas pero menos cómodas.

Las derivadas parciales $∂$ indican que se debe derivar respecto a una variable dejando el resto como si fueran constantes (derivar respecto a *x* dejando *y* como constante y así sucesivamente).

**Ejemplo**

Suponer una cantidad *q =x2 y-x y2*

donde se mide *x*=3.0 ±0.1 *y*=2.0±0.1.

¿Cuál es el error de *q*?

$$δ\_{q}\leq \left|\frac{∂q}{∂x}\right|.δ\_{x}+\left|\frac{∂q}{∂x}\right|.δ\_{y}=\left|2 x y-y^{2}\right|.δ\_{x}+\left|x^{2}-2 x y\right|.δ\_{y}$$

Ahora se deben evaluar los valores

$$δ\_{q}\leq \left|2 3 2-2^{2}\right| 0,1+\left|3^{2}-2 3 3\right| 0,1=1,1$$

Si consideramos dos cifras significativas entonces *δq*=1.1

Calculando el valor de *q* se obtiene *q* = 18 – 12 = 6 por lo tanto se debería reportar:

*q* = 6.0 ± 1.1

Recordar que para evaluar la ecuación resultante de la propagación de errores, es decir evaluar los valores numéricos de *x, y* o las demás variables si las hubiera, se deben usar los valores que se midieron experimentalmente o los promedios si se realizaron muchas mediciones. Los errores de cada una de estas variables se deben evaluar usando los errores de los instrumentos o los errores estadísticos según el caso (se usará el mayor entre el error del instrumento o el error estadístico).

Cabe aclarar que cuando se deben evaluar ángulos debe usarse el valor en radianes.